A

Génie Mécanique, 5ème Semestre

EXAMEN FINAL – MÉCANIQUE VIBRATOIRE

AUTOMNE 2019-2020

DURÉE :2H30MIN

Instructions :

Ne pas retourner cette page avant d'y être autorisé

Avant l'examen

- Placez votre carte d'étudiant CAMIPRO devant vous sur la table.
- Les téléphones portables doivent être éteints et placés dans vos sacs.
- Préparez votre espace de travail. Matériel autorisé :
  - Stylos bleus et/ou noirs, **les stylos rouge et vert sont réservés pour la correction.**
  - Les crayons sont autorisés uniquement pour les dessins.
  - Une calculatrice est autorisée.

Pendant l'examen

- Écrivez et dessinez avec soin. Ce qui est illisible ne sera pas corrigé.
- Des feuilles de papier supplémentaires sont disponibles auprès des assistants.
  - Prenez soin de numéroter et d'indiquer votre nom sur toutes les feuilles de réponse.
- Levez la main si vous avez une question ou si vous souhaitez aller aux toilettes.
- Lors des 15 dernières minutes de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- Lorsque l'examen est terminé, **posez votre stylo**, et restez assis et silencieux jusqu'à ce que nous ayons ramassé TOUTES les copies.

Contenu de l'examen

- Question 1 – 15 points
  - *Page 1*
- Question 2 – 15 points
  - *Page 1*
- Question 3 – 20 points
  - *Page 2*
- Question 4 – 15 points
  - *Page 2*
- Question 5 – 35 points
  - *Page 3*

QUESTION 1 (15 points)

Sur un oscillateur élémentaire, avec raideur k, masse m et coefficient d'amortissement c, on applique une force périodique, ayant la formule :

$$f(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)\,(1 + 3\cos(\omega_0 t))$$

- **i) À quelles fréquences aura-t-on un mouvement ?........................ (4 pts)**
- **ii) Calculer la valeur de l'amplitude de mouvement pour chaque fréquence........ (9 pts)**
- **iii) À quelle fréquence trouve-t-on l'amplitude la plus large ?.................... (2 pts)**

Formule d'aide :

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$$

Données pour le problème :

$$\frac{F_0}{k} = 1\ \text{m};\ \omega_0 = 1\,\frac{\text{rd}}{\text{s}};\ \frac{c}{m} = 10^{-2}\,\frac{\text{rd}}{\text{s}}$$

QUESTION 2 (15 points)

Le système de la Figure 2.1.a reçoit des vibrations externes à deux fréquences : $\omega_{ext,1}^2 = \omega_0^2$ et $\omega_{ext,2}^2 = 1.25\omega_0^2$, où ω_0 est la pulsation propre du système original. On veut limiter l'amplitude de vibration du système avec un amortisseur de Frahm en version conservative (Figure 2.1.b) avec les conditions suivantes : l'amplitude de mouvement de m_0 à $\omega_{ext,1}$ doit être nulle ; et elle doit être 9 fois plus petite que dans le système original à $\omega_{ext,2}$ (Figure 2.1.a). Calculer :

- **i) Le rapport entre les masses $\frac{m_2}{m_1}$.. (10 pts)**
- **ii) Pour quelle fréquence on trouve une amplitude de la masse secondaire 100 fois plus large que l'amplitude de m_0 dans l'amortisseur de Frahm.................... (5 pts)**

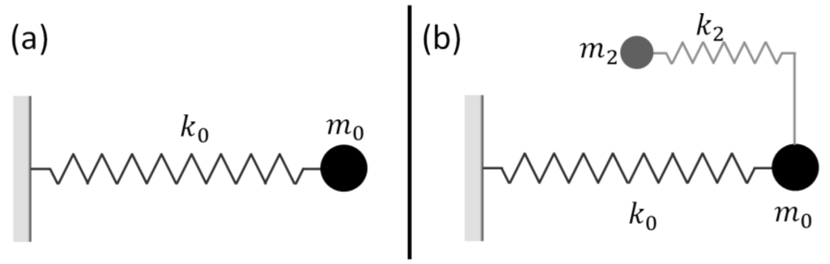

Figure 2.1 | Schémas pour le système original (a) et l'amortisseur de Frahm (b)

QUESTION 3 (20 points)

Le système *conservatif sans gravité* de la Figure 3.1 se compose de deux ressorts sans masse de constante k, ainsi que d'une barre de masse m, longueur L et rigidité infinie. On suppose que les angles de rotation θ sont toujours petits ($\theta \ll 1$). Les fréquences propres du système sont : $\omega_I = \sqrt{2\frac{k}{m}}$; $\omega_{II} = \sqrt{12\frac{k}{m}}$ et les vecteurs propres associés sont : $\vec{v}_I = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}_{II} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ dans les coordonnées $\{x_1, x_2\}$. On lâche le système depuis une situation $x_1(t=0) = x_0; x_2(t=0) = 0$.

i) Écrire l'évolution temporelle de l'amplitude du premier mode, $q_1(t)$. .... (5 pts)

ii) Écrire l'évolution temporelle de l'amplitude du deuxième mode, $q_2(t)$. .... (5 pts)

iii) Écrire l'évolution temporelle de $x_1(t)$ et $x_2(t)$. .... (10 pts)

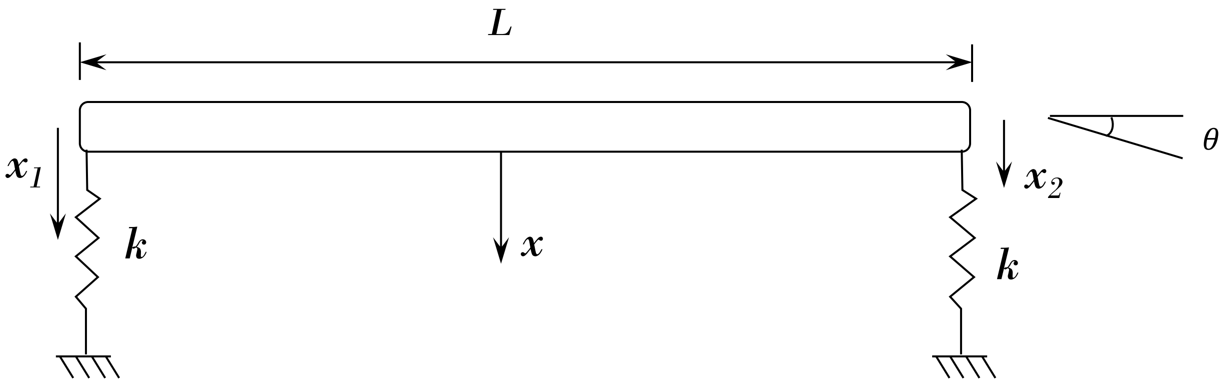

Figure 3.1 | Schéma du système, avec la barre de rigidité infinie de masse m, et les ressorts.

QUESTION 4 (15 points)

Le système de la Figure 4.1 est une barre de section A, longueur L, module de Young E, et densité volumique de masse ρ_m. On est intéressé par les *vibrations longitudinales* dans cette barre.

i) Calculer les fréquences propres de la barre. .... (10 pts)

ii) Calculer les modes normaux de la barre .... (5 pts)

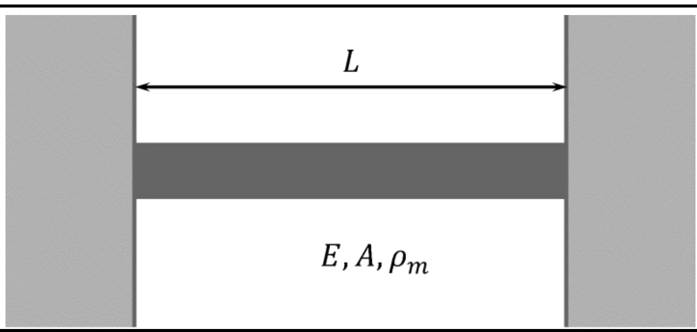

Figure 4.1 | Schéma du système, avec la barre où on étude les vibrations longitudinales.

QUESTION 5 (35 points)

Le système *sans gravité* de la Figure 5.1 se compose de 3 barres indéformables de masse m_0 reliées avec de ressorts sans masse de raideur $\frac{k_0}{3}$. La barre au milieu présente un ressort en torsion avec raideur $\kappa = \frac{k_0 L^2}{12}$ et elle supporte une force externe appliqué au milieu de la barre.

- **i) Combien degrés de liberté on trouve dans le système ?......(1 pt)**
- **ii) Écrire les équations du mouvement du système en fonction de x_1, x_2, x_3 ......(6 pts)**
- **iii) Écrire la matrice de rigidité et la matrice de masse du système......(4 pts)**
- **iv) Déterminer les pulsations propres......(6 pts)**
- **v) Déterminer les vecteurs propres.......(3 pts)**
- **vi) Est-ce que les pulsations et vecteurs propres dépendent de F_{ext} ? Pourquoi ?......(3 pts)**
- **vii) Si $F_{ext}(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$, calculer la force effective sur chaque mode normal......(6 pts)**
- **viii) Est-ce que la valeur de la force effective est définie de manière unique ?......(3 pts)**
- **ix) Pour quelle(es) valeurs de ω on trouvera une amplitude maximale ?......(3 pts)**

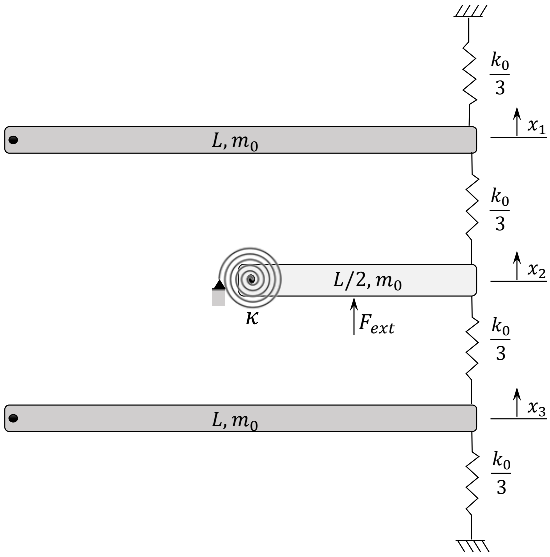

Figure 5.1 | Schéma du système, avec les barres de rigidité infinie et les ressorts.